М А Т Е М А Т И К А

УДК 517.968, 517.983.37, 517.958:535.4

А. А. Цупак

О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ОБЪЕМНОМ ТЕЛЕ, ЧАСТИЧНО ЭКРАНИРОВАННОМ СИСТЕМОЙ ПЛОСКИХ ЭКРАНОВ[1]

Аннотация.

Актуальность и цели. Цель работы – теоретическое исследование векторной задачи рассеяния электромагнитной волны на частично экранированном объемном теле.

Материалы и методы. Задача рассматривается в квазиклассической постановке; краевая задача сводится к системе интегродифференциальных уравнений, для исследования которой применяются элементы теории псевдодифференциальных операторов на многообразиях с краем.

Результаты. Сформулирована квазиклассическая постановка задачи дифракции; краевая задача сведена к системе интегродифференциальных уравнений; оператор системы уравнений рассмотрен как псевдодифференциальный оператор (ПДО) в пространствах Соболева на многообразиях с краем; исследована квадратичная форма матричного ПДО, установлена ее коэрцитивность; доказана фредгольмовость ПДО.

Выводы. Получен результат о фредгольмовости матричного интегродифференциального оператора рассматриваемой задачи дифракции, важный для дальнейшего теоретического исследования задачи дифракции и для обоснования проекционных методов ее приближенного решения.

Ключевые слова: векторная задача дифракции, интегродифференциальные уравнения, пространства Соболева, псевдодифференциальные операторы, квадратичная форма, коэрцитивность.

A. A. Tsupak

ON FREDHOLM PROPERTY OF AN INTEGRO-DIFFERENTIAL OPERATOR IN THE PROBLEM OF ELECTROMAGNETIC WAVE DIFFRACTION ON A VOLUMETRIC BODY, PARTIALLY SCREENED BY A SYSTEM OF FLAT SCREENS

Abstract.

Background. The aim of this work is to study a new vector problem of electromagnetic wave scattering on a partially shielded volumetric inhomogeneous anisotropic body.

Material and methods. The problem is considered in the quasiclassical formulation; the original boundary value problem is reduced to a system of integro-

[1] Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00344).

differential equations; the properties of the system are studied using pseudodifferential calculus in Sobolev spaces on manifolds with a boundary.

Results. The quasiclassical formulation of the diffraction problem is proposed; the boundary value problem for Maxwell's equations is reduced to a system of integro-differential equations; the operator of this system is treated as a pseudodifferential operator (ψDO) in Sobolev spaces on manifolds with a boundary; the quadratic form of the matrix ψDO is studied and is shown to be coercive; the Fredholm property of the ψDO is proved.

Conclusions. The matrix ψDO is proved to be a Fredholm operator of zero index; this results can be used for further theoretical study of the diffraction problem as well as for validation of numerical methods.

Key words: vector diffraction problem, integro-differential equations, Sobolev spaces, pseudodifferential operators, coercive quadratic form.

1. Постановка задачи дифракции. Система интегродифференциальных уравнений

Пусть Q – ограниченная область с кусочно-гладкой границей ∂Q, причем некоторая часть этой границы Ω – плоский экран или система непересекающихся плоских экранов: $\bar{\Omega} \subset \partial Q$. Край $\partial\Omega := \bar{\Omega} \setminus \Omega$ экрана Ω – гладкая кривая (или система кривых) класса C^∞ без точек самопересечения; $\partial\Omega_\delta := \bigcup\limits_{x\in\partial\Omega} B_\delta(x)$ – трубчатые окрестности края экрана. Предполагаем, что экран Ω – абсолютно проводящая поверхность с определенным заранее полем нормалей $\mathbf{n}$.

Область Q является неоднородной и анизотропной; она характеризуется постоянной магнитной проницаемостью $\mu_e > 0$ и тензорной диэлектрической проницаемостью $\hat{\varepsilon}(x)$, причем $\varepsilon_{ij} \in C^\infty(\bar{Q})$. Потребуем, чтобы во всех точках области неоднородности существовал тензор $\hat{\xi}(x) = (\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{\mathbf{I}})^{-1}$; здесь $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_r = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} / \varepsilon_e$ – тензор относительной диэлектрической проницаемости. Кроме того, всюду в $\bar{Q}$ для $\hat{\varepsilon}(x)$ должно выполняться хотя бы одно из условий:

$$\operatorname{Re}\hat{\varepsilon}(x)\mathbf{v}\cdot\bar{\mathbf{v}} \ge C_1 |\mathbf{v}|^2 \text{ при } C_1 > 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{Im}\hat{\varepsilon}(x)\mathbf{v}\cdot\bar{\mathbf{v}} \ge C_2 |\mathbf{v}|^2 \text{ при } C_2 > 1 \tag{2}$$

для всех $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$.

Свободное пространство $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}$ однородно с постоянными значениями проницаемостей $\mu_e > 0$ и ε_e, причем всюду в $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}$ выполняются условия

$$\operatorname{Re}\varepsilon_e > 0, \ \operatorname{Im}\varepsilon_e > 0. \tag{3}$$

Задача дифракции электромагнитной волны с гармонической зависимостью от времени вида $e^{-i\omega t}$ на частично экранированном теле Q приводит к следующей системе интегродифференциальных уравнений [1]:

$$\mathbf{E}(x)-\left(k_e^2+\operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_Q \widehat{\mathbf{G}}(x,y)(\widehat{\varepsilon}_r(y)-\widehat{\mathbf{I}})\mathbf{E}(y)\,dy-$$

$$-\left(k_e^2+\operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_\Omega \widehat{\mathbf{G}}(x,y)\mathbf{u}(y)\,ds_y=\mathbf{E}_0(x),\ x\in Q,$$

$$\left(-\left(k_e^2+\operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_Q \widehat{\mathbf{G}}(x,y)(\widehat{\varepsilon}_r(y)-\widehat{\mathbf{I}})\mathbf{E}(y)\,dy-\right.$$

$$\left.-\left(k_e^2+\operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_\Omega \widehat{\mathbf{G}}(x,y)\mathbf{u}(y)\,ds_y\right)_\tau=\mathbf{E}_{0,\tau}(x),\ x\in\Omega. \tag{4}$$

Здесь k_e – волновое число ($k_e^2=\omega^2\varepsilon_e\mu_e$); $\mathbf{E}$ – полное электрическое поле; $\mathbf{E}_0$ – падающее электрическое поле; $\mathbf{u}$ – поверхностная плотность электрического тока на Ω (представляет собой векторное поле, касательное к Ω); $\widehat{\mathbf{I}}$ – единичный 3×3 -тензор.

Функция Грина уравнения Гельмгольца в свободном пространстве определяется стандартным образом:

$$\widehat{\mathbf{G}}(x,y)=G(x,y)\widehat{\mathbf{I}}=\frac{e^{ik_e|x-y|}}{4\pi|x-y|}\widehat{\mathbf{I}}\,;$$

символом $(\mathbf{w})_\tau$ обозначена операция вычисления касательной компоненты векторного поля $\mathbf{w}$ во внутренних точках экрана Ω [2, с. 97].

Введем ток поляризации $\mathbf{J}(y)=(\widehat{\varepsilon}_r(y)-\widehat{\mathbf{I}})\mathbf{E}(y)$ и перепишем систему (4) в токах, разделив первое уравнение на $\overline{k}_e$, а второе – на k_e:

$$\frac{1}{\overline{k}_e}\widehat{\xi}(x)\mathbf{J}(x)-\frac{1}{\overline{k}_e}\left(k_e^2+\operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_Q \widehat{\mathbf{G}}(x,y)\mathbf{J}(y)\,dy-$$

$$-\frac{1}{\overline{k}_e}\left(k_e^2+\operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_\Omega \widehat{\mathbf{G}}(x,y)\mathbf{u}(y)\,ds_y=\frac{1}{\overline{k}_e}\mathbf{E}_0(x),\ x\in Q,$$

$$\left(-\left(k_e+\frac{1}{k_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_Q \widehat{\mathbf{G}}(x,y)\mathbf{J}(y)\,dy-\right.$$

$$\left.-\left(k_e+\frac{1}{k_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\int\limits_\Omega \widehat{\mathbf{G}}(x,y)\mathbf{u}(y)\,ds_y\right)_\tau=\frac{1}{k_e}\mathbf{E}_{0,\tau}(x),\ x\in\Omega. \tag{5}$$

Представим тензор $\widehat{\mathbf{G}}$ в виде $\widehat{\mathbf{G}}(x,y)=\widehat{\mathbf{G}}_0(x,y)+\widehat{\mathbf{G}}_1(x,y)$, где $\widehat{\mathbf{G}}_0(x,y)=G_0(x,y)\widehat{\mathbf{I}}=\left(4\pi|x-y|\right)^{-1}\widehat{\mathbf{I}}$, и введем оператор системы (5):

$$\widehat{L} = \widehat{A} + \widehat{K}^1 + \widehat{K}^2 . \qquad (6)$$

Компоненты матричных операторов в разложении (6) определим следующим образом:

$$A_{11}\mathbf{J}(x) = \frac{1}{\bar{k}_e}\hat{\xi}(x)\mathbf{J}(x) - \frac{1}{\bar{k}_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\int_Q \widehat{\mathbf{G}}_0(x,y)\mathbf{J}(y)\,dy,$$

$$A_{12}\mathbf{u}(x) = -\frac{1}{\bar{k}_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\int_\Omega \widehat{\mathbf{G}}_0(x,y)\mathbf{u}(y)\,ds_y,$$

$$A_{21}\mathbf{J}(x) = \left(-\frac{1}{k_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\int_Q \widehat{\mathbf{G}}_0(x,y)\mathbf{J}(y)dy\right)_\tau,$$

$$A_{22}\mathbf{u}(x) = \left((k_e + \frac{1}{k_e}\operatorname{grad}\operatorname{div})\int_\Omega \widehat{\mathbf{G}}_0(x,y)\mathbf{u}(y)\,ds_y\right)_\tau; \qquad (7)$$

$$K_{11}^1\mathbf{J}(x) = -\frac{k_e^2}{\bar{k}_e}\int_Q \widehat{\mathbf{G}}_0(x,y)\mathbf{J}(y)\,dy, \quad K_{12}^1\mathbf{u}(x) = -\frac{k_e^2}{\bar{k}_e}\int_\Omega \widehat{\mathbf{G}}_0(x,y)\mathbf{u}(y)\,ds_y,$$

$$K_{21}^1\mathbf{J}(x) = \left(-k_e\int_Q \widehat{\mathbf{G}}_0(x,y)\mathbf{J}(y)dy\right)_\tau, \; K_{22}^1\mathbf{u}(x) = \mathrm{O}. \qquad (8)$$

Компоненты оператора $\widehat{K}^2$ в разложении (6) определяются согласно системе (5), причем ядро интегральных операторов в $\widehat{K}^2$ – тензор $\widehat{\mathbf{G}}_1(x,y)$.

Будем рассматривать введенный оператор как матричный псевдодифференциальный оператор (ПДО) в пространствах Соболева на многообразиях с краем [2–4]:

$$\widehat{L} : L_2^3(Q)\times W(\Omega) \to L_2^3(Q)\times W'(\Omega),$$

где $W(\overline{\Omega}) = W$ – пространство сечений векторных расслоений [2, с. 88], представляющее собой пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_W$:

$$\|\mathbf{u}\|_W^2 = \|\mathbf{u}\|_{-1/2}^2 + |\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{-1/2}^2 .$$

Здесь $\|\mathbf{u}\|_{-1/2}^2$ обозначает норму в пространстве Соболева $H^{-1/2}(\Omega)$; пространство $W'(\Omega) = W'$ – антидвойственное к W [2, с. 88].

2. Коэрцитивность квадратичной формы оператора задачи дифракции

Введем обозначения: $L_2^3(Q)\times W(\Omega) =: P$, $L_2^3(Q)\times W'(\Omega) =: P'$ и $(\mathbf{J},\mathbf{u}) =: \mathbf{w} \in P$.

Теорема 1. Квадратичная форма $(\widehat{L}\mathbf{w},\mathbf{w})_{L_2^3}$ оператора $\widehat{L}$ является коэрцитивной, т.е. существует такой компактный оператор $\widehat{L}^c : P \to P'$, что для всех $\mathbf{w} \in P$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Im}((\widehat{L} - \widehat{L}^c)\mathbf{w},\mathbf{w})_{L_2^3} \geq \gamma \|\mathbf{w}\|_P \tag{9}$$

с некоторой константой $\gamma > 0$.

Доказательство. 1. Покажем сначала, что операторы $\widehat{K}^1$, $\widehat{K}^2$ компактны в выбранных пространствах. Для $\widehat{K}^2$ это очевидно, так как ядра интегральных операторов в определении всех $\widehat{K}_{ij}^2$ имеют устранимую особенность.

Компактность $\widehat{K}^1$ следует из свойств операторов типа потенциала, оператора касательного следа и компактности операторов вложения в пространствах Соболева. Так как $\mathbf{u} \in W$, то $K_{12}^1\mathbf{u} \in H^1(Q)$ [5], поэтому $K_{12}^1 : W \to L_2^3(Q)$ компактен. Аналогично, из условия $\mathbf{J} \in L_2(Q)$ следует [6] $\int\limits_Q \widehat{\mathbf{G}}_0(x,y)\mathbf{J}(y)dy \in H_{loc}^2(\mathbb{R}^3)$, откуда $K_{11}^1\mathbf{J} \in H^2(Q)$ и $K_{21}^1\mathbf{J} \in H^{3/2}(\Omega)$; следовательно, операторы $K_{11}^1 : L_2^3(Q) \to L_2^3(Q)$ и $K_{21}^1 : L_2^3(Q) \to W'$ компактны.

2. Остается показать, что квадратичная форма $(\widehat{A}\mathbf{w},\mathbf{w})_{L_2^3}$ оператора $\widehat{A}$ удовлетворяет условию коэрцитивности. Имеем:

$$(\widehat{A}\mathbf{w},\mathbf{w})_{L_2^3} = \left(\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \right) =$$

$$= (A_{11}\mathbf{J},\mathbf{J}) + (A_{12}\mathbf{u},\mathbf{J}) + (A_{21}\mathbf{J},\mathbf{u}) + (A_{22}\mathbf{u},\mathbf{u}). \tag{10}$$

В работах [7, 8] показано, что при выполнении одного из условий (1) или (2) ПДО

$$A\mathbf{J}(x) = \widehat{\xi}(x)\mathbf{J}(x) - \operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_Q \widehat{\mathbf{G}}_0(x,y)\mathbf{J}(y)dy = \overline{k}_1 A_{11}\mathbf{J}(x)$$

является фредгольмовым с нулевым индексом, а для его «главной части» A_0 верны неравенства

$$\operatorname{Im}(A_0\mathbf{J},\mathbf{J}) \geq \gamma_0 \|\mathbf{J}\|_{L_2^3(Q)} \text{ при } \gamma_0 > 0 \tag{11}$$

и

$$\operatorname{Re}(A_0\mathbf{J},\mathbf{J}) \geq \gamma_1 \|\mathbf{J}\|_{L_2^3(Q)} \text{ при } \gamma_1 > 1. \tag{12}$$

Обозначая $1/\overline{k}_e$ через $k_1 := k_1' + ik_1''$, получим

$$\operatorname{Im}(A_{11}\mathbf{J},\mathbf{J}) = \operatorname{Im}\left(k_1(A\mathbf{J},\mathbf{J})\right) = k_1' \operatorname{Im}(A\mathbf{J},\mathbf{J}) + k_1'' \operatorname{Re}(A\mathbf{J},\mathbf{J}).$$

Отсюда, а также из (11), (12) и ограничений (3) на ε_0, выводим:

$$\operatorname{Im}((A_{11} - A_{11}^c)\mathbf{J}, \mathbf{J}) \geq \gamma_2 \|\mathbf{J}\|, \qquad (13)$$

где $\gamma_2 > 0$, а $A_{11}^c : L_2^3(Q) \to L_2^3(Q)$ компактен. Отметим, что свойство коэрцитивности (13) выполняется и в случае, когда область неоднородности Q не является поглощающей.

Рассмотрим теперь квадратичную форму оператора A_{22}:

$$\operatorname{Im}(A_{22}\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \operatorname{Im} \int_{\Omega} (k_e + \frac{1}{k_e} \operatorname{grad} \operatorname{div}) \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{G}}_0(x, y)\mathbf{u}(y) ds_y \bar{\mathbf{u}}(x) ds_x =$$

$$= \operatorname{Im} \int \int a(\xi)(k_e \hat{u}(\xi) - \frac{1}{k_e} \xi(\xi \cdot \hat{u}(\xi))) e^{ix\xi} d\xi \cdot \bar{\mathbf{u}}(x) dx =$$

$$= \operatorname{Im} \int a(\xi) \left(k_e \hat{u}(\xi) - \frac{1}{k_e} \xi(\xi \cdot \hat{u}(\xi)) \right) \bar{\hat{u}}(\xi) d\xi =$$

$$= \operatorname{Im} \int \left(\frac{1}{\langle \xi \rangle} + a'(\xi) \right) \left(k_e \hat{u}(\xi) - \frac{1}{k_e} \xi(\xi \cdot \hat{u}(\xi)) \right) \bar{\hat{u}}(\xi) d\xi =$$

$$= \operatorname{Im} k_e \left(\int \frac{1}{\langle \xi \rangle} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi + \int \frac{1}{|k_e|^2} |\xi \cdot \hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right) + \operatorname{Im}(A_{22}^c \mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq$$

$$\geq \gamma_3 \|\mathbf{u}\|_W^2 + \operatorname{Im}(A_{22}^c \mathbf{u}, \mathbf{u}). \qquad (14)$$

В сделанных выше преобразованиях оператор A_{22} представлен как ПДО с матричным символом $\sigma(A_{22}) = a(\xi)(k_e \widehat{\mathbf{I}} - \frac{1}{k_e} \xi \otimes \xi^T)$, $a(\xi)\widehat{\mathbf{I}}$ – символ интегрального оператора $\int_{\Omega} \widehat{\mathbf{G}}_0(x, y)\mathbf{u}(y) ds_y$, а $\frac{1}{\langle \xi \rangle}$ – главная часть $a(\xi)$. Из (14) видно, что квадратичная форма оператора A_{22} также удовлетворяет условию коэрцитивности.

Покажем теперь, что

$$(A_{12}\mathbf{u}, \mathbf{J}) = \overline{(A_{21}\mathbf{J}, \mathbf{u})}. \qquad (15)$$

Всюду ниже будем рассматривать плоские экраны, перпендикулярные оси $0x_3$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, тогда $\mathbf{u} = (u^1, u^2, 0)^T$ и $(\mathbf{v})_\tau := (v^1, v^2, 0)$ для всех вектор-функций $\mathbf{v}$, заданных на Ω. Обозначим $\frac{1}{k} = \frac{\bar{k}}{|k|^2} =: k_1$, $\bar{k}_1 = k_2$, тогда

$$-(A_{12}\mathbf{u}, \mathbf{J}) = \int_{Q} \overline{\mathbf{J}(x)} k_1 \operatorname{grad}_x \operatorname{div}_x \int_{\Omega} \widehat{\mathbf{G}}_0(x, y)\mathbf{u}(y) ds_y dx =$$

$$= k_1 \int\limits_Q \operatorname{div}_x \left(\overline{\mathbf{J}(x)} \operatorname{div}_x \int\limits_\Omega \widehat{\mathbf{G}}_0(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y \right) dx -$$

$$-k_1 \int\limits_Q \operatorname{div}_x \overline{\mathbf{J}(x)} \operatorname{div}_x \int\limits_\Omega \widehat{\mathbf{G}}_0(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y dx =$$

$$= k_1 \int\limits_{\partial Q} \overline{\mathbf{J}(x)} \operatorname{div}_x \left(\int\limits_\Omega \widehat{\mathbf{G}}_0(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y \right) \cdot \mathbf{n}_Q(x) ds_x +$$

$$+k_1 \int\limits_\Omega \mathbf{u}(y) \int\limits_Q \operatorname{grad}_y G_0(x,y) \operatorname{div}_x \overline{\mathbf{J}(x)} dx ds_y =: i_1 + i_2 .$$

Рассмотрим теперь форму $(L_{21}\mathbf{J},\mathbf{u})$:

$$-(A_{21}\mathbf{J},\mathbf{u}) = \int\limits_\Omega \overline{\mathbf{u}(x)} k_2 \operatorname{grad}_x \operatorname{div}_x \int\limits_Q \widehat{\mathbf{G}}_0(x,y)\mathbf{J}(y)dy ds_x =$$

$$= k_2 \int\limits_\Omega \overline{\mathbf{u}(x)} \operatorname{grad}_x \int\limits_Q \operatorname{grad}_x G_0(x,y)\mathbf{J}(y)dy ds_x =$$

$$= -k_2 \int\limits_\Omega \overline{\mathbf{u}(x)} \operatorname{grad}_x \int\limits_Q \operatorname{grad}_y G_0(x,y)\mathbf{J}(y)dy ds_x =$$

$$= -k_2 \int\limits_\Omega \overline{\mathbf{u}(x)} \operatorname{grad}_x \left(\int\limits_Q \operatorname{div}_y (\widehat{\mathbf{G}}_0(x,y)\mathbf{J}(y)) - \right.$$

$$\left. - \int\limits_Q G_0(x,y) \operatorname{div}_y \mathbf{J}(y))dy \right) ds_x =: I_1 + I_2 .$$

Так как

$$I_1 = -k_2 \int\limits_\Omega \overline{\mathbf{u}(x)} \operatorname{grad}_x \int\limits_{\partial Q} \widehat{\mathbf{G}}_0(x,y)\mathbf{J}(y) \cdot \mathbf{n}_Q(y) ds_y ds_x =$$

$$= -k_2 \int\limits_\Omega \overline{\mathbf{u}(y)} \int\limits_{\partial Q} \operatorname{grad}_y G_0(y,x)(\mathbf{J}(x) \cdot \mathbf{n}_Q(x)) ds_x ds_y =$$

$$= k_2 \int\limits_{\partial Q} \int\limits_\Omega (\overline{\mathbf{u}(y)} \cdot \operatorname{grad}_x G_0(x,y))(\mathbf{J}(x) \cdot \mathbf{n}_Q(x)) ds_y ds_x =$$

$$= k_2 \int\limits_{\partial Q} \mathbf{J}(x) \operatorname{div}_x \left(\int\limits_\Omega \widehat{\mathbf{G}}_0(x,y)\overline{\mathbf{u}(y)} ds_y \right) \mathbf{n}_Q(x) ds_x = \overline{i_1}$$

и

$$I_2 = k_2 \int\limits_{\Omega} \overline{\mathbf{u}(x)} \operatorname{grad}_x \int\limits_{Q} \widehat{\mathbf{G}}_0(x,y) \operatorname{div}_y \mathbf{J}(y) dy ds_x =$$

$$= k_2 \int\limits_{\Omega} \overline{\mathbf{u}(y)} \int\limits_{Q} \operatorname{grad}_y G_0(y,x) \operatorname{div}_x \mathbf{J}(x)) dx ds_y =$$

$$= k_2 \int\limits_{\Omega} \overline{\mathbf{u}(y)} \int\limits_{Q} \operatorname{grad}_y G_0(x,y) \operatorname{div}_x \mathbf{J}(x)) dx ds_y = \overline{i_2},$$

то получим требуемое соотношение: $(A_{12}\mathbf{u},\mathbf{J}) = \overline{(A_{21}\mathbf{J},\mathbf{u})}$.

Из доказанного выше, а также из (13) и (14) заключаем, что

$$\operatorname{Im}((\widehat{A} - \widehat{A}^c)\mathbf{w},\mathbf{w}) \geq \gamma \|\mathbf{w}\|_P \qquad (16)$$

с некоторой константой $\gamma > 0$ и компактным оператором $\widehat{A}^c : P \to P'$.

Из доказанной теоремы следует основной результат работы.

Теорема 2. Оператор $\widehat{A} : P \to P'$ является фредгольмовым с нулевым индексом, причем для случая области Q без поглощения достаточно выполнения ограничений (1) и (3); если же область неоднородности Q является поглощающей, то дополнительно должно выполняться условие (2).

Заключение

Рассмотрена задача дифракции электромагнитной волны на сложном препятствии. Применение теории потенциала и псевдодифференциальных операторов позволило доказать важное утверждение о коэрцитивности квадратичной формы матричного интегродифференциального оператора, которое играет существенную роль для дальнейшего теоретического и численного исследования поставленной задачи.

Список литературы

1. **Smirnov, Y. G.** Integrodifferential Equations of the Vector Problem of Electromagnetic Wave Diffraction by a System of Nonintersecting Screens and Inhomogeneous Bodies / Y. G. Smirnov, A. A. Tsupak // Advances in Mathematical Physics. – 2015. – Vol. 2015. – 6 p.
2. **Ильинский, А. С.** Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. Псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции / А. С. Ильинский, Ю. Г. Смирнов. – М. : ИПРЖР, 1996. – 173 с.
3. **Агранович, М. С.** Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей / М. С. Агранович. – М. : МЦНМО, 2013. – 379 с.
4. **Трибель, Х.** Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М. : Мир, 1980. – 664 с.
5. **Costabel, M.** Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results / M. Costabel // SIAM Journal of Mathematical Analysis. – 1988. – Vol. 19, № 3. – P. 613–626.
6. **Banjai, L.** Boundary element methods / L. Banjai. – Zurich, 2007.

7. **Валовик, Д. В.** Метод псевдодифференциальных операторов для исследования объемного сингулярного интегрального уравнения электрического поля / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-маткматические науки. – 2009. – № 4 (12). – С. 70–84.
8. **Valovik, D. V.** Pseudodifferential Operator Method in a Problem on the Diffraction of an Electromagnetic Wave on a Dielectric Body / D. V. Valovik, Y. G. Smirnov // Differential Equations, 2012. – Vol. 48, № 4. – P. 517–523.

References

1. Smirnov Y. G., Tsupak A. A. *Advances in Mathematical Physics*. 2015, vol. 2015, 6 p.
2. Il'inskiy A. S., Smirnov Yu. G. *Difraktsiya elektromagnitnykh voln na provodyashchikh tonkikh ekranakh. Psevdodifferentsial'nye operatory v zadachakh difraktsii* [Electromagnetic wave diffraction on thin conducting screens. Pseudodifferential operators in diffraction problems]. Moscow: IPRZhR, 1996, 173 p.
3. Agranovich M. S. *Sobolevskie prostranstva, ikh obobshcheniya i ellipticheskie zadachi v oblastyakh s gladkoy i lipshitsevoy granitsey* [Sobolev spaces, their generalizations and elliptic problems in areas with smooth and Lipschitz boundaries]. Moscow: MTsNMO, 2013, 379 p.
4. Tribel' Kh. *Teoriya interpolyatsii. Funktsional'nye prostranstva. Differentsial'nye operatory* [Interpolation theory. Functional spaces. Differential operators]. Moscow: Mir, 1980, 664 p.
5. Costabel M. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*. 1988, vol. 19, no. 3, pp. 613–626.
6. Banjai L. *Boundary element methods*. Zurich, 2007.
7. Valovik D. V., Smirnov Yu. G. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matkmaticheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2009, no. 4 (12), pp. 70–84.
8. Valovik D. V, Smirnov Y. G. *Differential Equations*. 2012, vol. 48, no. 4, pp. 517–523.

Цупак Алексей Александрович
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Tsupak Aleksey Aleksandrovich
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: altsupak@yandex.ru

УДК 517.968, 517.983.37, 517.958:535.4

Цупак, А. А.

О фредгольмовости интегродифференциального оператора в задаче дифракции электромагнитной волны на объемном теле, частично экранированном системой плоских экранов / А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 4 (36). – С. 3–11.